

112(上)高一數學龍騰版

寒假作業



班級：

座號：

姓名：

1. 計算 $\frac{\left(1+\frac{11}{2}\right)\times\left(1+\frac{11}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{11}{11}\right)}{\left(1+\frac{13}{2}\right)\times\left(1+\frac{13}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{13}{13}\right)}$ 之值，用最簡分數表示得_____。

2. 化簡 $\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} + \frac{x^3-1}{x^2+x+1} =$ _____。(其中 $x \neq 3$ ， $x \neq -1$)

3. 比較 $a=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ， $b=2+\sqrt{15}$ ， $c=\sqrt{10}+\sqrt{6}$ 之大小：_____。

4. 若 a 、 b 為有理數，且 $a < b$ ，試比較 $A = \frac{a+b}{2}$ ， $B = \frac{2a+b}{3}$ ， $C = \frac{a+2b}{3}$ ， $D = \frac{a+3b}{4}$ ， $E = \frac{2a+3b}{5}$ ，求五個數的大小順序為_____。

5. 已知 x 為實數，且滿足 $3|x-1|+2|x-15|=37$ ，其中 $1 < x < 15$ ，試求 $x =$ _____。

6. 解不等式 $|x-3|-|x+1| \geq 0$ ，得 x 的範圍為_____。

7. 在一個玻璃瓶中培養細菌，已知細菌的數量每隔一分鐘就增加一倍，現在小明在玻璃瓶中放入一個細菌，60分鐘後玻璃瓶中就充滿細菌，試問若小明一開始就放入8個細菌，則最少經過_____分鐘玻璃瓶內便會充滿細菌。

8. 已知 SARS 病毒的直徑為85奈米，其中1奈米為 10^{-9} 公尺，而近期造成全球疫情嚴重的新型冠狀病毒，其病毒直徑為0.12微米，其中1微米為 10^{-6} 公尺，請問新型冠狀病毒的病毒直徑約為 SARS 病毒的_____倍。(取二位有效數字)

9. 設 a 、 b 皆大於0， $\log a = 10$ ， $\log b = 8$ ，則 $\log(a+b)$ 最接近的整數為_____。

10. 設 $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 7$, 則 $10^{2a+c-b} =$ _____ 。

11. 已知 a 、 b 、 c 為非零實數，當 $ab < 0$ 且 $ac < 0$ ，則直線 $L: ax + by + c = 0$ 不會通過坐標平面上第 _____ 象限。

12. 若將直線 $2x + 3y + 4 = 0$ 的圖形向上平移 k 單位，且向左平移 k 單位，所得新直線通過點 $(3, 5)$ ，則 $k =$ _____ 。

13. 一正方形中心為 $(2, 2)$ 且此正方形有一邊在直線 $x + 2y - 1 = 0$ 上，求此正方形的面積為 _____ 。

14. 坐標平面上，已知兩個定點 $A(3,5)$ 、 $B(-10,4)$ ，若動點 P 滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$ ，則 P 的軌跡方程式為_____。

15. 已知圓 $C:x^2+y^2+3x-5y-4=0$ ，求圓 C 與 x 軸的交點坐標為_____。

16. 過圓 $C:x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 上一點 $A(4,2)$ 的切線方程式為_____。

17. 設 $3(x-1)^3+4(x-1)^2+2=a(x-1)(x-2)(x+1)+b(x-1)(x-2)+c(x-2)+d$ ，求 $(a,b,c,d)=$
_____。

18. 設 $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 3x^2 + kx + 1$ ， $g(x) = x^3 + 2kx^2 - x - 6$ ， $k > 0$ ，若 $f(x) \times g(x)$ 之各項係數總和為 0，則 k 的值為_____。

19. 設多項式 $f(x)$ 滿足 $f(-1) = 5$ ， $f(0) = 7$ ， $f(1) = -3$ ， $f(2) = 4$ ，求 $f(x)$ 的奇次項係數和為_____。

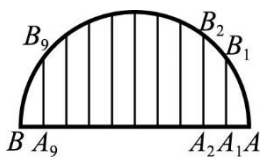
20. 某次考試，全班成績不佳，最高為 50 分。老師想用一個線型函數來調整分數，使 50 分變成 100 分，20 分變成 60 分，則原來的 41 分變成_____分。

21. 二次函數 $y = f(x)$ 之圖形通過 $A(-2, 11)$ 、 $B(-1, 5)$ 、 $C(2, 11)$ 三點，則 $f(x) =$ _____。

22. 若 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + 4x - 5$ 的對稱中心坐標為 $(p, 5)$ ，求 $a =$ _____。

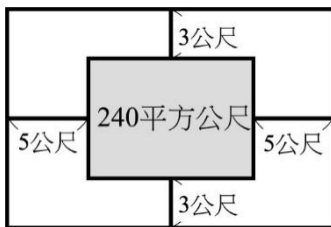
23. 若 $a = 0.\overline{123} + \frac{5}{11}$ ，則將 a 寫成小數型式時，小數點後第 2021 位數字為_____。

24. 如圖，有一圓形拱橋，橋面位置恰為直徑 \overline{AB} ，為了慶祝活動的裝飾，計劃將橋面 \overline{AB} 十等分後（也就是 $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \dots = \overline{A_8A_9} = \overline{A_9B}$ ），在每個等分點豎立一個鋼柱， $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{A_2B_2}$ 、 \dots 、 $\overline{A_9B_9}$ 。已知 $\overline{AB} = 20$ 公尺，試求 $\overline{A_4B_4} =$ _____ 公尺。



25. 設 a 、 b 為有理數，若 $a\sqrt{80} + b(\sqrt{9+4\sqrt{5}}) = \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ ，試求數對 $(a,b) =$ _____。

26. 如圖所示，有一園藝設計師欲種植一片面積為 240 平方公尺的矩形綠地，且有一條步道環繞矩形綠地的外圍，此橫向步道的寬為 3 公尺，縱向步道的寬為 5 公尺，請問步道面積最小為 _____ 平方公尺。



27. 設 A 點坐標為 x ， B 點坐標為 12 且 $x < 12$ ，若 P 點在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP} = 3:2$ ，而 Q 點為 \overline{PB} 外一點， $\overline{QP}:\overline{QB} = 2:3$ ，已知 Q 點坐標為 $-\frac{18}{5}$ ，求 $x =$ _____。

28. 數線上 $A(4)$ 、 $B(7)$ ，若 P 滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ，則 P 點坐標為_____。

29. $|1+\sqrt{2}+\sqrt{3}|+|1-\sqrt{2}+\sqrt{3}|+|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|1-\sqrt{2}-\sqrt{3}|=_____。$

30. 不等式 $|x-1|+3|x-2|\leq 5$ 的解可用區間 $[a,b]$ 來表示，則數對 $(a,b)=_____。$

31. 設 $a^{2x}=3$ ，求 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^{3x}+a^{-5x}}=_____。$

32. 化簡 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-6} \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-4} =$ _____ 。

33. 放射性物質每經過一段固定時間會衰變，質量變成原本的一半，我們稱此固定時間為該放射性物質的「半衰期」。已知放射物 A 的半衰期為 6 小時，放射物 B 的半衰期為 3 小時，若測得一塊礦石中，A、B 兩物質的殘餘量比為 9:2，則 18 小時前該礦石中，放射物 A 的含量是放射物 B 的 _____ 倍。

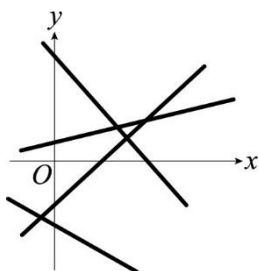
34. 已知 x 、 y 、 z 為正實數，且 $x^y = 1$ ， $y^z = \frac{1}{4}$ ， $z^x = \frac{2}{3}$ ，則 $xyz =$ _____ 。

35. 若 $9^x = 4$ ，則 $27^x + 81^{-x} =$ _____。

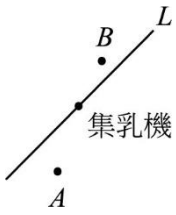
36. 化簡 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a}}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}} =$ _____。

37. 計算 $\log 100\sqrt{10} \times \log \frac{1}{100} + 100^{\log \sqrt{7}}$ 之值為 _____。

38. 四條直線： $y = ax + 1$ ， $y = bx + 5$ ， $y = cx - 2$ ， $y = dx - 3$ 的圖形如圖，比較 a 、 b 、 c 、 d 之大小為 _____。



39. 爸媽兩人經營一個新興牧場，如圖所示， A 與 B 是兩個羊舍所在的位置。現今想在牧場上蓋一個集乳機，爸媽倆討論集乳機位置時，爸希望集乳機在直線 $L: x - y = 0$ 上；媽則希望集乳機到兩個羊舍的距離相等，以便於收集羊乳。若 $A(3,1)$ 、 $B(7,9)$ ，且集乳機位於第一象限，則在圍欄內滿足爸媽需求的集乳機地點坐標為_____。



40. 平面上 $A(1,6)$ 、 $B(-1,a)$ ，若 \overline{AB} 的垂直平分線為 $x + 3y + k = 0$ ，則數對 $(a,k) =$ _____。

41. 設 $A(0,5)$ 、 $B(1,6)$ ， P 點在 $x - y + 2 = 0$ 直線上，求 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 之最小值為_____。

42. 若直線 L 過 $(2,3)$ 且 $P_1(1,-2)$ 到 L 之距離與 $P_2(-2,-1)$ 到 L 之距離比為 $1:2$ ，求直線 L 之方程式為 _____。
43. 若點 $P(a,2a-3)$ 在三直線 $L_1:x+2y-4=0$ ， $L_2:3x+y-4=0$ ， $L_3:x-y-4=0$ 所圍成之三角形內部（含邊界），則整數 $a =$ _____。
44. 已知 $A(-1,3)$ 、 $B(5,k)$ 、 $C(3,k)$ 、 $D(9,7)$ ，直線 $L:3x-2y=1$ 同時與 \overline{AB} 、 \overline{CD} 相交，求 k 之範圍為 _____。
45. 過 $P(1,3)$ 對圓 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 作二切線，若切點為 A 、 B ，則 $\triangle PAB$ 之外接圓方程式為 _____。

46. 已知半徑為 $\sqrt{10}$ 的圓 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ，圓心在直線 $x - y = 0$ 上，且 $(2, 4)$ 在圓上，試求 $d + e + f =$ _____。

47. 已知圓 $C: x^2 + y^2 - x - 3y - 2 = 0$ ，若直線 $L: y = mx$ 和圓 C 相交於相異兩點 A 、 B ，且弦長 $\overline{AB} = 4$ ，則斜率 $m =$ _____。

48. 已知 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ ，求 $x + y$ 的最大值為_____。

49. 設直線 $L: x - 2y = 0$ ，圓 $C: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$ ，求垂直於 L 且與圓 C 相切的切線方程式為_____。

50. 已知 $f(x)$ 為三次多項式且 $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(-1) = f(2) = 6$ ， $f(1) = 10$ ，則 $(x^2 + 1)f(x)$ 除以 x 的餘式為 _____。

51. 已知 a 、 b 、 c 為實數，多項式 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 同時可被 $x^2 + x$ 與 $x^2 + 5x + 4$ 整除，則 $a + b + 1975c =$ _____。

52. 一地產公司有 80 棟公寓住宅，當租金每棟每月為 3000 元時，所有住宅均租出；每月租金每增加 100 元時，則平均多一住宅不能租出，而每一租出之房屋每月需養護費 300 元，為求最高利潤如何改訂租金？_____。

53. 設 a 、 b 為實數，已知坐標平面上拋物線 $y = x^2 + ax + b$ 與 x 軸交於 A 、 B 兩點，且 $\overline{AB} = 7$ ，若拋物線 $y = x^2 + ax + b + k$ 與 x 軸交於 P 、 Q 兩點，請問有_____個整數 k 滿足 $12 < \overline{PQ} < 14$ 。

54. 設 a 、 p 、 h 、 k 均為非零實數，若 $y = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ 的圖形只通過第一及第三象限，請問下列哪些選項的推論為真？_____。
(A) $a > 0$ (B) $p > 0$ (C) $h > 0$ (D) $k < 0$ (E) $hk > 0$

55. 自點 $A(-3,3)$ 發出的光線 L 射到 x 軸上，被 x 軸反射的光線 M 與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ 相切，則 L 的方程式為_____。

1. $\frac{91}{1150}$
2. x^2
3. $b > a > c$
4. $D > C > E > A > B$
5. 10
6. $x \leq 1$
7. 57
8. 1.4
9. 10
10. $\frac{28}{3}$
11. 二
12. 25
13. 20
14. $5x^2 + 5y^2 - 134x - 58y - 158 = 0$
15. $(-4, 0)$ 或 $(1, 0)$
16. $3x + 4y = 20$
17. $(3, 1, 7, 9)$
18. 3
19. -4
20. 88
21. $2x^2 + 3$
22. -3
23. 6
24. $4\sqrt{6}$
25. $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$
26. 300
27. -1
28. $-2 \pm 3\sqrt{6}$
29. $2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
30. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$
31. $\frac{9}{41}$
32. $5 - 2\sqrt{6}$
33. $\frac{9}{16}$
34. $\frac{1}{12}$
35. $\frac{129}{16}$
36. 1
37. 2
38. $c > a > d > b$
39. $(5, 5)$
40. $(0, -9)$
41. $2\sqrt{5}$
42. $7x - 3y = 5$ 或 $3x + y = 9$
43. 2
44. $4 \leq k \leq 7$
45. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{17}{4}$
46. -12 或 20
47. -7 或 1
48. $1 + 2\sqrt{2}$
49. $2x + y + 10 = 0$ 或 $2x + y = 0$
50. 4
51. 9
52. 5600 元或 5700 元
53. 13
54. AE
55. $2x + y = -3$