

數學學習練習作業

範圍：指數

1. 試求下列各式 x 值：

(1) $2^4 \cdot 4^2 = 2^x$

(2) $(2^4)^3 = 8^x$

(3) $x^2 = 2^2$ (4) $x^3 = -2^3$

2. 試求下列各值

(1) $\frac{2^{-4}}{2^{-7}}$

(2) $(2^{-3})^2 + (2^3)^{-2} + (-2)^{-5}$

(3) $(2^{-3})^0$

3. 試求下列各值

(1) $\sqrt[3]{64}$ (2) $25^{-0.5}$ (3) $16^{0.25}$ (4) $16^{-\frac{3}{2}} \times 32^{\frac{4}{5}} \times \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}$ (5) $\sqrt[5]{7^{20}} \cdot \sqrt[5]{7^{12}}$

4. 設 α 為一正數， $\alpha^{\frac{1}{2}} + \alpha^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，試求：

(1) $\alpha + \alpha^{-1}$ 之值。

(2) $\alpha^{\frac{1}{4}} + \alpha^{-\frac{1}{4}}$ 之值。

5. 設 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 之值。

6. 設 $\sqrt[x]{32} = \sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且 $3^{15y+3x} = 81^{xy}$ ，求 x 和 y 之值。

7. 設 x, y, z 為不為 0 的實數，且 $2^x = 3^y = 6^z$ ，試求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$

解答

1. (1) 8 ; (2) 4 ; (3) 2 或 -2 ; (4) -2 。
2. (1) 8 ; (2) 0 ; (3) 1 。
3. (1) 4 ; (2) $\frac{1}{5}$; (3) 2 ; (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (5) $7^{\frac{26}{5}} = 16807\sqrt[5]{7}$ 。
4. (1) 7 ; (2) $\sqrt{5}$ 。
5. $2\sqrt{2} - 1$ 。
6. $x = 5, y = 3$ 。
7. 0 。

數學學習練習作業

範圍：對數

1. 試求下列各式之值

(1) $\log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$ (2) $\log_{2\sqrt{2}} 512$ (3) $2^{\log_2 5}$ (4) $2^{\log_4 10}$ (5) $9^{\log_3 5}$ 。

2. 試解下列方程式

(1) $\log_{\frac{1}{16}} x = -0.75$ (2) $2^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$ (3) $\log_4(\log_3 x) = 1$

3. 試求下列對數有意義時， x 的範圍。

(1) $\log_2(1+2x-3x^2)$

(2) $\log_{(2x-1)}(-3x^2+11x-6)$

4. 設 $x = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}$ ， $y = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$ ，試求 $\log_2(x^3 - y^3)$ 。

5. 設 $x = \log_{\sqrt{2}} 3$ ，試求(1) 8^x (2) $4^x - 4^{-x}$ 。

6. 試求下列各式之值

(1) $\log_{10} \frac{25}{4} + \log_{10} 18 - \log_{10} \frac{9}{8}$

(2) $\log_2 \sqrt{\frac{7}{28}} + \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 72$

(3) $\log_{\sqrt{10}} 13 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{10}} 11 + \log_{\sqrt{10}} \frac{4}{7} - \log_{\sqrt{10}} \frac{13}{35} + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{10}} \frac{25}{11}$

7. 試求下列各值：

(1) $\log_2(\log_2 49) + 2\log_4(\log_7 2)$

(2) $\frac{\log_5 16}{\log_{25} 8} + \frac{\log_2 25}{\log_8 625}$

(3) $\log_{10} \frac{7}{36} + 5\log_{10} 2 - \log_{10} \frac{14}{25} + 2\log_{10} 3$

(4) $(\log_3 15)(\log_5 15) - \log_3 5 - \log_5 3$

8. 設 $\log_{10} 2 = u$ ， $\log_{10} 3 = v$ ，以 u, v 的式子表示出 $\log_5 72$ 。

解答

1. (1) $-\frac{2}{5}$; (2) 6 ; (3) 5 ; (4) $\sqrt{10}$; (5) 25 °

2. (1) 8 ; (2) $\frac{1}{9}$; (3) 81 °

3. (1) $-\frac{1}{3} < x < 1$; (2) $\frac{2}{3} < x < 3, x \neq 1$ °

4. $\frac{7}{2}$ °

5. (1) 729 ; (2) $80\frac{80}{81}$ °

6. (1) 2 ; (2) $-\frac{1}{2}$; (3) 4 °

7. (1) 1 ; (2) $\frac{25}{6}$; (3) 2 ; (4) 2 °

8. $\frac{3u+2v}{1-u}$ °

數學學習練習作業

範圍：銳角三角函數及其基本關係

1. 試求下列各式的值：

(1) $2\cos^2 30^\circ - 1$

(2) $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$

(3) $\frac{2\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$

(4) $\tan 45^\circ + \sqrt{3}\tan 60^\circ - \sin^2 30^\circ$

2. 設 θ 為一銳角，已知 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，求 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ 。

3. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\sin A = \frac{3}{5}$ ，求 \overline{BC} 與 \overline{AC} 的長度。

4. 求 $\sin 15^\circ$ 的值。

5. 試求下列各式的值：

(1) $\sin^2 23^\circ + \sin^2 67^\circ$

(2) $(\sin 43^\circ - \sin 47^\circ)^2 + (\cos 43^\circ + \cos 47^\circ)^2$

6. 已知 θ 為一銳角，且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，求 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 的值。

7. 試求 $2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 設 x 的二次方程式 $x^2 - \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)x + 1 = 0$ 有一根 $2 + \sqrt{3}$ ，則：

(1) $\sin \theta \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sin \theta + \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$

解答

1. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) $\sqrt{3}$; (4) $\frac{15}{4}$ 。

2. $\cos \theta = \frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 。

3. $\overline{BC} = 6$, $\overline{AC} = 8$ 。

4. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 。

5. (1) 1 ; (2) 2 。

6. $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 或 $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 。

7. -1 。

8. (1) $\frac{1}{4}$; (2) $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$; (3) $\pm \frac{3\sqrt{6}}{8}$ 。

數學學習練習作業

範圍：廣義角的三角函數

1. 一個時鐘從 12 點整走到 2 點 10 分，請問其時針與分針所旋轉的有向角各是多少？
2. 設 $\theta_n = \frac{n}{6} \times 180^\circ$ ， $n \in N$ ，且 $50 \leq n \leq 100$ ，試問有多少 n 值使 θ_n 為第二象限角？
3. 若 -2356° 的最小正同界角為 a ，最大負同界角為 b ，則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 試求下列各三角函數的值：
(1) $\sin(-180^\circ)$ (2) $\cos(-225^\circ)$ (3) $\sin 2100^\circ$ (4) $\tan(-1200^\circ)$
5. 設 θ 為一第三象限角，若 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ，求 $\sin \theta$ 與 $\tan \theta$ 。
6. 設 $\sin(-110^\circ) = k$ ，試以 k 表示 $\tan 610^\circ$ 之值 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 設 θ 為一第三象限角，且滿足 $6\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$ ，試求 $\cos \theta$ 之值。
8. 化簡 $\sin(180^\circ + \theta)\cos(90^\circ + \theta) - \sin(90^\circ + \theta)\cos(180^\circ - \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 試求 $\sum_{k=1}^{180} \cos k^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

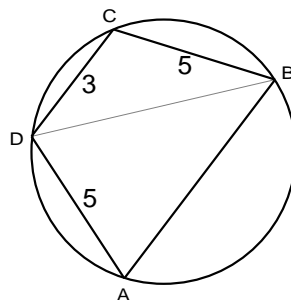
解答

1. 時針旋轉了 -65° ，分針旋轉了 -780° 。
2. 9 個。
3. $(164^\circ, -196^\circ)$ 。
4. (1) 0 ; (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (4) $\sqrt{3}$ 。
5. $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \theta = 2\sqrt{2}$
6. $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ 。
7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
8. 1。
9. -1。

數學學習練習作業

範圍：正弦定理與餘弦定理

1. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 120^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\overline{AC} = 4$ ，試求 \overline{BC} ， \overline{AB} 及 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑 R 。
2. 設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$ ，求其三邊長之比。
3. 設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ，若 $a - 2b + c = 0$ ， $3a + b - 2c = 0$ ，則 $\sin A : \sin B : \sin C = ?$
4. $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{2}{3}(a + b - c) = \sin A + \sin B - \sin C$ ，則此三角形外接圓之直徑為_____。
5. 設 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 5$ ，求 \overline{BC} 。
6. 設 $\triangle ABC$ 的三邊長 $a = 3, b = 8, c = 7$ ，求 $\angle C$ 。
7. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 1 + \sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，試求 \overline{BC} 及 $\angle B, \angle C$ 的大小。
8. $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$ ，則 $\cos A =$ _____。
9. 設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6, \overline{AC} = 4, \overline{BC} = 5$ 。若 D 為 \overline{BC} 上異於 C 之一點， $\overline{AD} = 4$ ，求 $\overline{BD} =$ _____。
10. 如右圖，圓內接四邊形 $ABCD$ ，已知 $\overline{AD} = 5, \overline{BC} = 5, \overline{CD} = 3, \angle BCD = 120^\circ$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。
11. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3, \overline{CA} = 8, \angle A = 120^\circ$ ，試求其面積。
12. 設 $\triangle ABC$ 中， $a = 5, b = 7, c = 8$ ，試求其面積。
13. $\triangle ABC$ 中， $a = 4, b = \sqrt{5} + 1, c = \sqrt{5} - 1$ ，試求下列各式之值：
 - (1) $a(b^2 + c^2) \cos A + b(c^2 + a^2) \cos B + c(a^2 + b^2) \cos C =$ _____；
 - (2) $(b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C =$ _____。



解答

1. $\overline{BC} = 4, \overline{AB} = 4\sqrt{3}, R = 4$ °
2. $a:b:c = \sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$ °
3. $3:5:7$ °
4. $\frac{3}{2}$ °
5. 7 °
6. 60° °
7. $\overline{BC} = \sqrt{2}, \angle C = 45^\circ, \angle B = 105^\circ$ °
8. $\frac{5}{7}$ °
9. 4 °
10. 8 °
11. $6\sqrt{3}$ °
12. $10\sqrt{3}$ °
13. (1) 48 ; (2) $4+2\sqrt{5}$ °

數學學習練習作業

範圍：三角測量

- 如圖 1，大阪城內天守閣雄偉壯闊，為測其高，先從地面一點 P ，測得閣頂 A 之仰角 45° ，面向此閣前進 50 公尺到達 Q 點後，再次測得閣頂 A 之仰角 60° ，試求天守閣之高度 \overline{AB} 。
- 如圖 2，北海道舊道廳不知其高，廳頂插有一旗長 3 公尺，地面上一觀測者測得旗頂 A 之仰角為 45° ，旗底 C 之仰角為 30° ，已知觀測者高 1.5 公尺，試求旗底與地面之距離(即舊道廳高 \overline{BC})。

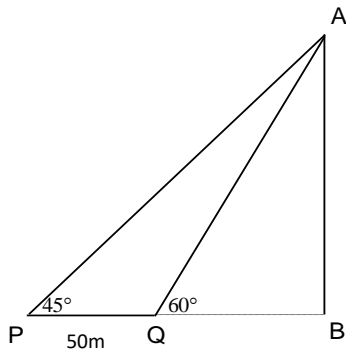


圖 1

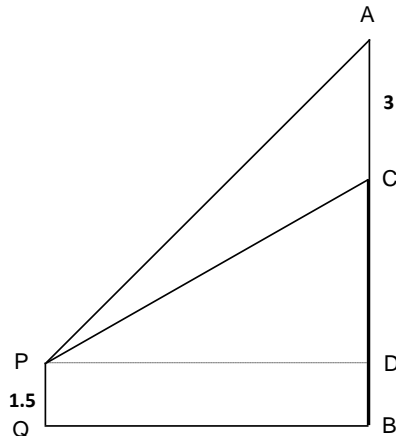


圖 2

- 如圖 3，一船朝北航行於洞爺湖中，發現在北 30° 東方為有一燈塔，繼續朝北前進 10 哩後發現此燈塔在其東北方。試問若該船行駛方向不變，則與燈塔最近的距離是多少？
- 如圖 4，站在瞭望台 O 點處，發現正北方仰角 60° 之 A 點處有一架飛機保持 $500\sqrt{3}$ 公尺高度等速朝東飛行，5 秒後又測得該飛機已在仰角為 30° 之 B 點處。試計算該飛機的速度為何？
- 如圖 5，阿宏於山麓測得山頂之仰角為 45° ，由此山麓循 30° 斜坡上行 200 公尺再測得山頂仰角為 60° ，則山高究竟多少公尺？

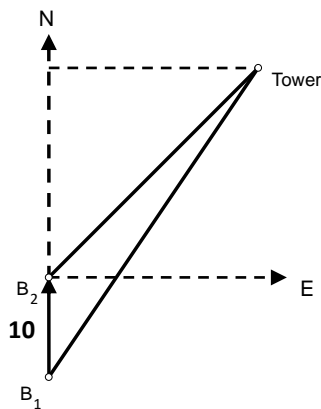


圖 3

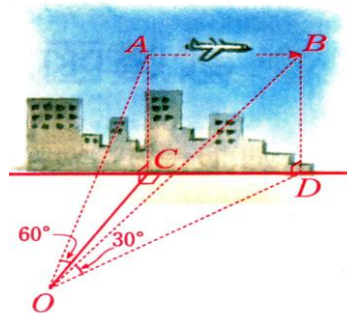


圖 4

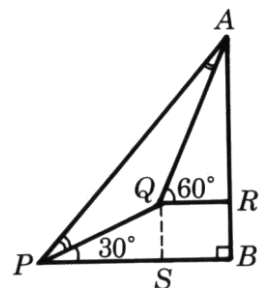


圖 5

6. 海中一小島，四周圍 x 哩內佈設水雷，今鐵打泥號於 A 處望見該島在北 60° 西處，向西行駛 10 哩至 B 處再望該島，此時島在北 30° 西，若鐵打泥號之航向不變，則佈雷最大半徑 S 小於_____哩時，該艦方無危險。
7. 設有 A, B 兩個瞭望台，兩台之間的距離為 $100\sqrt{6}$ 公尺，今發現海上有一船 C ，又設 $\angle ABC = 105^\circ$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，試問船 C 與瞭望台 A 相距_____公尺。
8. 如圖 6，為測得一湖泊岸邊 A, B 兩點間的距離，太歐在岸邊找了另一點 C ，並測得 $\angle ACB = 60^\circ$ ， $\overline{AC} = 100$ 公尺， $\overline{BC} = 80$ 公尺，試求 \overline{AB} 。
9. 如圖 7，隔河看到兩處涼亭 A, B ，但不能到達，在岸邊取相距 $\sqrt{3}$ 公里的 C, D 兩點，測得 $\angle ACB = 75^\circ$ ， $\angle BCD = 45^\circ$ ， $\angle ADC = 30^\circ$ ， $\angle ADB = 45^\circ$ ，求 $\overline{AB} =$ _____公里。
10. 如圖 8，一直線上三點 C, D, E ，測一山仰角各為 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ (但 C, D, E 三點與山之垂足不共線)，若 $\overline{CD} = 600$ 公尺， $\overline{DE} = 400$ 公尺，求山高。

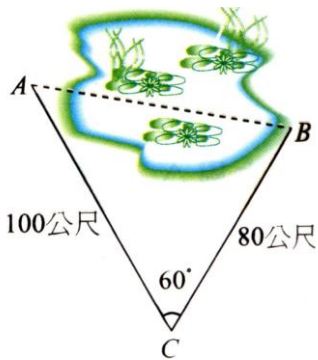


圖 6

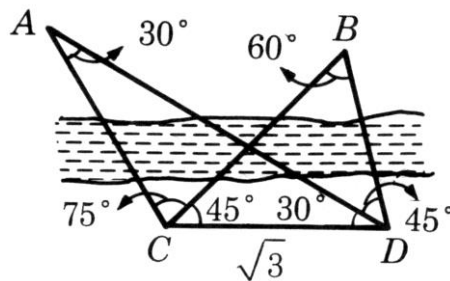


圖 7

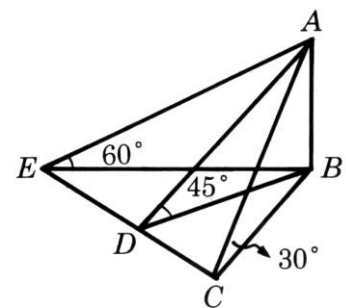


圖 8

解答

1. $25(3 + \sqrt{3})$ 公尺。
2. $(3 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$ 公尺。
3. $5(\sqrt{3} + 1)$ 哩。
4. $200\sqrt{2} m/s$ 。
5. $100(\sqrt{3} + 1)$ 公尺。
6. $5\sqrt{3}$ 。
7. $300 + 100\sqrt{3}$ 。
8. $20\sqrt{21}$ 公尺。
9. $\sqrt{5}$ 。
10. $200\sqrt{15}$ 公尺。