

## 數學學習練習作業

範圍：指數

1. 試求下列各式  $x$  值：

(1)  $2^4 \cdot 4^2 = 2^x$

(2)  $(2^4)^3 = 8^x$

(3)  $x^2 = 2^2$  (4)  $x^3 = -2^3$

2. 試求下列各值

(1)  $\frac{2^{-4}}{2^{-7}}$

(2)  $(2^{-3})^2 + (2^3)^{-2} + (-2)^{-5}$

(3)  $(2^{-3})^0$

3. 試求下列各值

(1)  $\sqrt[3]{64}$       (2)  $25^{-0.5}$       (3)  $16^{0.25}$       (4)  $16^{-\frac{3}{2}} \times 32^{\frac{4}{5}} \times \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}$       (5)  $\sqrt[5]{7^{20}} \cdot \sqrt[5]{7^{12}}$

4. 設  $\alpha$  為一正數， $\alpha^{\frac{1}{2}} + \alpha^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，試求：

(1)  $\alpha + \alpha^{-1}$  之值。

(2)  $\alpha^{\frac{1}{4}} + \alpha^{-\frac{1}{4}}$  之值。

5. 設  $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$ ，求  $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$  之值。

6. 設  $\sqrt[x]{32} = \sqrt[y]{2^{3y-6}}$  且  $3^{15y+3x} = 81^{xy}$ ，求  $x$  和  $y$  之值。

7. 設  $x, y, z$  為不為 0 的實數，且  $2^x = 3^y = 6^z$ ，試求  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$

## 解答

---

1. (1) 8 ; (2) 4 ; (3) 2 或 -2 ; (4) -2 。
2. (1) 8 ; (2) 0 ; (3) 1 。
3. (1) 4 ; (2)  $\frac{1}{5}$  ; (3) 2 ; (4)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ; (5)  $7^{\frac{26}{5}} = 16807\sqrt[5]{7}$  。
4. (1) 7 ; (2)  $\sqrt{5}$  。
5.  $2\sqrt{2} - 1$  。
6.  $x = 5, y = 3$  。
7. 0 。

## 數學學習練習作業

範圍：對數

1. 試求下列各式之值

(1)  $\log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$       (2)  $\log_{2\sqrt{2}} 512$       (3)  $2^{\log_2 5}$       (4)  $2^{\log_4 10}$       (5)  $9^{\log_3 5}$ 。

2. 試解下列方程式

(1)  $\log_{\frac{1}{16}} x = -0.75$       (2)  $2^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$       (3)  $\log_4(\log_3 x) = 1$

3. 試求下列對數有意義時， $x$ 的範圍。

(1)  $\log_2(1+2x-3x^2)$

(2)  $\log_{(2x-1)}(-3x^2+11x-6)$

4. 設  $x = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}$ ， $y = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$ ，試求  $\log_2(x^3 - y^3)$ 。

5. 設  $x = \log_{\sqrt{2}} 3$ ，試求(1)  $8^x$       (2)  $4^x - 4^{-x}$ 。

6. 試求下列各式之值

(1)  $\log_{10} \frac{25}{4} + \log_{10} 18 - \log_{10} \frac{9}{8}$

(2)  $\log_2 \sqrt{\frac{7}{28}} + \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 72$

(3)  $\log_{\sqrt{10}} 13 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{10}} 11 + \log_{\sqrt{10}} \frac{4}{7} - \log_{\sqrt{10}} \frac{13}{35} + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{10}} \frac{25}{11}$

7. 試求下列各值：

(1)  $\log_2(\log_2 49) + 2\log_4(\log_7 2)$

(2)  $\frac{\log_5 16}{\log_{25} 8} + \frac{\log_2 25}{\log_8 625}$

(3)  $\log_{10} \frac{7}{36} + 5\log_{10} 2 - \log_{10} \frac{14}{25} + 2\log_{10} 3$

(4)  $(\log_3 15)(\log_5 15) - \log_3 5 - \log_5 3$

8. 設  $\log_{10} 2 = u$ ， $\log_{10} 3 = v$ ，以  $u, v$  的式子表示出  $\log_5 72$ 。

## 解答

---

1. (1)  $-\frac{2}{5}$  ; (2) 6 ; (3) 5 ; (4)  $\sqrt{10}$  ; (5) 25 °

2. (1) 8 ; (2)  $\frac{1}{9}$  ; (3) 81 °

3. (1)  $-\frac{1}{3} < x < 1$  ; (2)  $\frac{2}{3} < x < 3, x \neq 1$  °

4.  $\frac{7}{2}$  °

5. (1) 729 ; (2)  $80\frac{80}{81}$  °

6. (1) 2 ; (2)  $-\frac{1}{2}$  ; (3) 4 °

7. (1) 1 ; (2)  $\frac{25}{6}$  ; (3) 2 ; (4) 2 °

8.  $\frac{3u+2v}{1-u}$  °

## 數學學習練習作業

範圍：銳角三角函數及其基本關係

1. 試求下列各式的值：

(1)  $2\cos^2 30^\circ - 1$

(2)  $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$

(3)  $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

(4)  $\tan 45^\circ + \sqrt{3}\tan 60^\circ - \sin^2 30^\circ$

2. 設  $\theta$  為一銳角，已知  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，求  $\cos \theta$  與  $\tan \theta$ 。

3. 已知  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 10$ ， $\sin A = \frac{3}{5}$ ，求  $\overline{BC}$  與  $\overline{AC}$  的長度。

4. 求  $\sin 15^\circ$  的值。

5. 試求下列各式的值：

(1)  $\sin^2 23^\circ + \sin^2 67^\circ$

(2)  $(\sin 43^\circ - \sin 47^\circ)^2 + (\cos 43^\circ + \cos 47^\circ)^2$

6. 已知  $\theta$  為一銳角，且  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，求  $\sin \theta$  與  $\cos \theta$  的值。

7. 試求  $2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 設  $x$  的二次方程式  $x^2 - \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)x + 1 = 0$  有一根  $2 + \sqrt{3}$ ，則：

(1)  $\sin \theta \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $\sin \theta + \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$

## 解答

---

1. (1)  $\frac{1}{2}$  ; (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ; (3)  $\sqrt{3}$  ; (4)  $\frac{15}{4}$  。

2.  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ,  $\tan \theta = \frac{3}{4}$  。

3.  $\overline{BC} = 6$ ,  $\overline{AC} = 8$  。

4.  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$  。

5. (1) 1 ; (2) 2 。

6.  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  或  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \theta = \frac{4}{5}$  。

7. -1 。

8. (1)  $\frac{1}{4}$  ; (2)  $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$  ; (3)  $\pm \frac{3\sqrt{6}}{8}$  。

## 數學學習練習作業

範圍：廣義角的三角函數

1. 一個時鐘從 12 點整走到 2 點 10 分，請問其時針與分針所旋轉的有向角各是多少？
2. 設  $\theta_n = \frac{n}{6} \times 180^\circ$ ， $n \in N$ ，且  $50 \leq n \leq 100$ ，試問有多少  $n$  值使  $\theta_n$  為第二象限角？
3. 若  $-2356^\circ$  的最小正同界角為  $a$ ，最大負同界角為  $b$ ，則  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 試求下列各三角函數的值：  
(1)  $\sin(-180^\circ)$       (2)  $\cos(-225^\circ)$       (3)  $\sin 2100^\circ$       (4)  $\tan(-1200^\circ)$
5. 設  $\theta$  為一第三象限角，若  $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ ，求  $\sin \theta$  與  $\tan \theta$ 。
6. 設  $\sin(-110^\circ) = k$ ，試以  $k$  表示  $\tan 610^\circ$  之值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 設  $\theta$  為一第三象限角，且滿足  $6\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$ ，試求  $\cos \theta$  之值。
8. 化簡  $\sin(180^\circ + \theta)\cos(90^\circ + \theta) - \sin(90^\circ + \theta)\cos(180^\circ - \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 試求  $\sum_{k=1}^{180} \cos k^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 解答

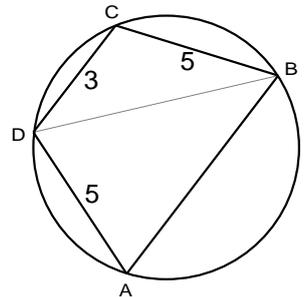
---

1. 時針旋轉了  $-65^\circ$ ，分針旋轉了  $-780^\circ$ 。
2. 9 個。
3.  $(164^\circ, -196^\circ)$ 。
4. (1) 0 ; (2)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  ; (3)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  ; (4)  $\sqrt{3}$ 。
5.  $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\tan \theta = 2\sqrt{2}$
6.  $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ 。
7.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
8. 1。
9. -1。

## 數學學習練習作業

範圍：正弦定理與餘弦定理

1. 已知  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 120^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\overline{AC} = 4$ ，試求  $\overline{BC}$ ， $\overline{AB}$  及  $\triangle ABC$  外接圓的半徑  $R$ 。
2. 設  $\triangle ABC$  中， $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 7$ ，求其三邊長之比。
3. 設  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ，若  $a - 2b + c = 0$ ， $3a + b - 2c = 0$ ，則  $\sin A : \sin B : \sin C = ?$
4.  $\triangle ABC$  中，若  $\frac{2}{3}(a + b - c) = \sin A + \sin B - \sin C$ ，則此三角形外接圓之直徑為\_\_\_\_\_。
5. 設  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 5$ ，求  $\overline{BC}$ 。
6. 設  $\triangle ABC$  的三邊長  $a = 3, b = 8, c = 7$ ，求  $\angle C$ 。
7. 已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 1 + \sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，試求  $\overline{BC}$  及  $\angle B, \angle C$  的大小。
8.  $\triangle ABC$  中，已知  $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$ ，則  $\cos A =$ \_\_\_\_\_。
9. 設  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 6, \overline{AC} = 4, \overline{BC} = 5$ 。若  $D$  為  $\overline{BC}$  上異於  $C$  之一點， $\overline{AD} = 4$ ，求  $\overline{BD} =$ \_\_\_\_\_。
10. 如右圖，圓內接四邊形  $ABCD$ ，已知  $\overline{AD} = 5, \overline{BC} = 5, \overline{CD} = 3, \angle BCD = 120^\circ$ ，則  $\overline{AB} =$ \_\_\_\_\_。
11. 已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 3, \overline{CA} = 8, \angle A = 120^\circ$ ，試求其面積。
12. 設  $\triangle ABC$  中， $a = 5, b = 7, c = 8$ ，試求其面積。
13.  $\triangle ABC$  中， $a = 4, b = \sqrt{5} + 1, c = \sqrt{5} - 1$ ，試求下列各式之值：
  - (1)  $a(b^2 + c^2) \cos A + b(c^2 + a^2) \cos B + c(a^2 + b^2) \cos C =$ \_\_\_\_\_；
  - (2)  $(b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C =$ \_\_\_\_\_。



## 解答

---

1.  $\overline{BC} = 4$ ,  $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ ,  $R = 4$ 。
2.  $a:b:c = \sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$ 。
3.  $3:5:7$ 。
4.  $\frac{3}{2}$ 。
5.  $7$ 。
6.  $60^\circ$ 。
7.  $\overline{BC} = \sqrt{2}$ ,  $\angle C = 45^\circ$ ,  $\angle B = 105^\circ$ 。
8.  $\frac{5}{7}$ 。
9.  $4$ 。
10.  $8$ 。
11.  $6\sqrt{3}$ 。
12.  $10\sqrt{3}$ 。
13. (1)  $48$ ; (2)  $4+2\sqrt{5}$ 。

# 數學學習練習作業

範圍：三角測量

- 如圖 1，大阪城內天守閣雄偉壯闊，為測其高，先從地面一點  $P$ ，測得閣頂  $A$  之仰角  $45^\circ$ ，面向此閣前進 50 公尺到達  $Q$  點後，再次測得閣頂  $A$  之仰角  $60^\circ$ ，試求天守閣之高度  $\overline{AB}$ 。
- 如圖 2，北海道舊道廳不知其高，廳頂插有一旗長 3 公尺，地面上一觀測者測得旗頂  $A$  之仰角為  $45^\circ$ ，旗底  $C$  之仰角為  $30^\circ$ ，已知觀測者高 1.5 公尺，試求旗底與地面之距離(即舊道廳高  $\overline{BC}$ )。

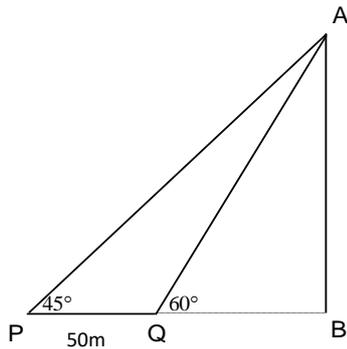


圖 1

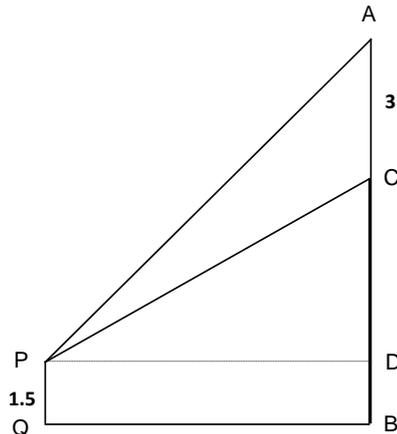


圖 2

- 如圖 3，一船朝北航行於洞爺湖中，發現在北  $30^\circ$  東方為有一燈塔，繼續朝北前進 10 哩後發現此燈塔在其東北方。試問若該船行駛方向不變，則與燈塔最近的距離是多少？
- 如圖 4，站在瞭望台  $O$  點處，發現正北方仰角  $60^\circ$  之  $A$  點處有一架飛機保持  $500\sqrt{3}$  公尺高度等速朝東飛行，5 秒後又測得該飛機已在仰角為  $30^\circ$  之  $B$  點處。試計算該飛機的速度為何？
- 如圖 5，阿宏於山麓測得山頂之仰角為  $45^\circ$ ，由此山麓循  $30^\circ$  斜坡上行 200 公尺再測得山頂仰角為  $60^\circ$ ，則山高究竟多少公尺？

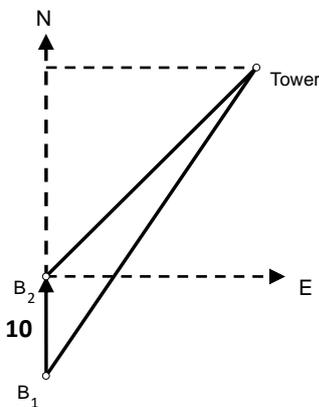


圖 3

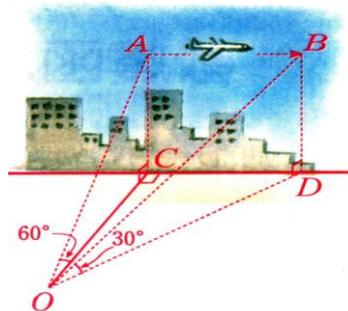


圖 4

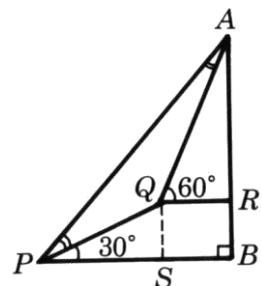


圖 5

6. 海中一小島，四周圍  $x$  哩內佈設水雷，今鐵打泥號於  $A$  處望見該島在北  $60^\circ$  西處，向西行駛 10 哩至  $B$  處再望該島，此時島在北  $30^\circ$  西，若鐵打泥號之航向不變，則佈雷最大半徑  $S$  小於\_\_\_\_\_哩時，該艦方無危險。
7. 設有  $A, B$  兩個瞭望台，兩台之間的距離為  $100\sqrt{6}$  公尺，今發現海上有一船  $C$ ，又設  $\angle ABC = 105^\circ$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，試問船  $C$  與瞭望台  $A$  相距\_\_\_\_\_公尺。
8. 如圖 6，為測得一湖泊岸邊  $A, B$  兩點間的距離，太歐在岸邊找了另一點  $C$ ，並測得  $\angle ACB = 60^\circ$ ， $\overline{AC} = 100$  公尺， $\overline{BC} = 80$  公尺，試求  $\overline{AB}$ 。
9. 如圖 7，隔河看到兩處涼亭  $A, B$ ，但不能到達，在岸邊取相距  $\sqrt{3}$  公里的  $C, D$  兩點，測得  $\angle ACB = 75^\circ$ ， $\angle BCD = 45^\circ$ ， $\angle ADC = 30^\circ$ ， $\angle ADB = 45^\circ$ ，求  $\overline{AB} =$ \_\_\_\_\_公里。
10. 如圖 8，一直線上三點  $C, D, E$ ，測一山仰角各為  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  (但  $C, D, E$  三點與山之垂足不共線)，若  $\overline{CD} = 600$  公尺， $\overline{DE} = 400$  公尺，求山高。

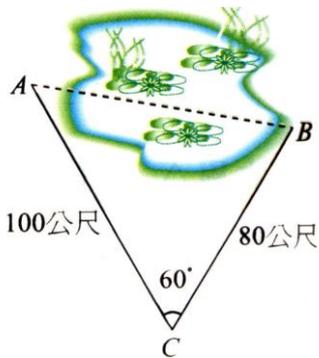


圖 6

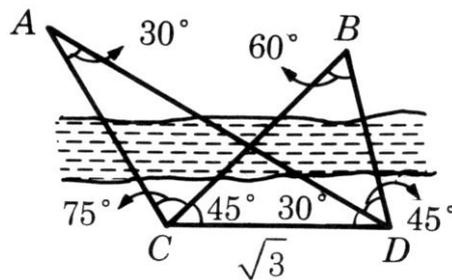


圖 7

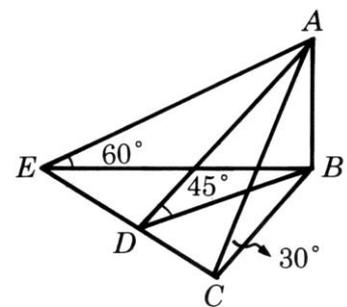


圖 8

## 解答

1.  $25(3 + \sqrt{3})$  公尺。
2.  $(3 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$  公尺。
3.  $5(\sqrt{3} + 1)$  哩。
4.  $200\sqrt{2} m/s$ 。
5.  $100(\sqrt{3} + 1)$  公尺。
6.  $5\sqrt{3}$ 。
7.  $300 + 100\sqrt{3}$ 。
8.  $20\sqrt{21}$  公尺。
9.  $\sqrt{5}$ 。
10.  $200\sqrt{15}$  公尺。