

# 109學年度 高一數學 暑假作業

班級: \_\_\_\_\_ (高二新班級)

座號: \_\_\_\_\_ (高二新座號)

姓名: \_\_\_\_\_

## 第一部分 數列與級數

1. 寫出下列各數列的前五項：

(1) 數列  $\langle a_n \rangle$ ， $a_n = -3 + 2n$ 。 (2) 數列  $\langle b_n \rangle$ ， $b_n = n^2 + 2$ 。

2. 寫出下列各數列的前五項：

(1) 等差數列  $\langle a_n \rangle$ ，首項  $a_1 = 10$ ，公差  $d = 3$ 。

(2) 等比數列  $\langle b_n \rangle$ ，首項  $b_1 = 3$ ，公比  $r = 2$ 。

3. (1) 等差數列  $\langle a_n \rangle$  中， $a_5 = 11$ ， $a_8 = 29$ 。試求：

① 首項  $a_1$ 。 ② 公差  $d$ 。 ③ 一般項  $a_n$ 。

(2) 等比數列  $\langle b_n \rangle$  中， $b_2 = 4$ ， $b_5 = 32$ 。試求：

① 首項  $b_1$ 。 ② 公比  $r$ 。 ③ 一般項  $b_n$ 。

4. 將下列等差數列改寫為遞迴定義式：

(1) 等差數列  $\langle a_n \rangle$ ，首項  $a_1 = 20$ ，公差  $d = -3$ 。

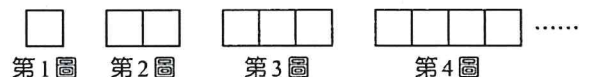
(2) 等差數列  $\langle b_n \rangle = \langle 5, 11, 17, 23, \dots \rangle$ 。

5. 將下列等比數列改寫為遞迴定義式：

(1) 等比數列  $\langle a_n \rangle$ ，首項  $a_1 = -2$ ，公比  $r = 3$ 。

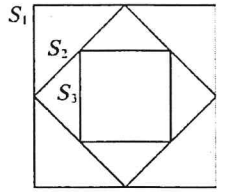
(2) 等比數列  $\langle b_n \rangle = \langle 2, -4, 8, -16, \dots \rangle$ 。

6. (1) 用牙籤拼成連續正方形如右圖，若依此規律，第  $n$  圖需要  $a_n$  枝牙籤，請寫出數



列  $\langle a_n \rangle$  的遞迴式。

- (2) 如右圖，正方形  $S_1$  的邊長為 2，連接  $S_1$  四邊中點得正方形  $S_2$ ，依此規律得一系列正方形  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ 。設  $b_n$  表示  $S_n$  的邊長，請寫出數列  $\langle b_n \rangle$  的遞迴式。



7. (1) 數列  $\langle a_n \rangle = \langle 2, 8, 18, 32, 50, \dots \rangle$ ，試寫出此數列的第 10 項。

- (2) 數列  $\langle b_n \rangle = \langle 1, 5, 6, 11, 17, 28, \dots \rangle$ ，試寫出此數列的第 10 項。

8. (1) 數列  $\langle a_n \rangle$  滿足遞迴式  $\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = 3a_{n-1} - 5, n \geq 2 \end{cases}$ ，試寫出此數列的前 5 項。

- (2) 數列  $\langle b_n \rangle$  滿足遞迴式  $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{3} \\ b_n = \frac{1}{3 - b_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$ ，試寫出此數列的前 5 項。(5 分)

9. 設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足遞迴式  $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$ ，試觀察此數列

前幾項，推測其一般項  $a_n$  的形式，並用數學歸納法證明。

10. 利用數學歸納法證明： $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ，對所有正整數  $n$  均成立。

證證明略

11. 已知等差級數  $5 + 8 + 11 + 14 + \dots$ 。

- (1) 試寫出此級數所形成的前 6 項級數形式。 (2) 試求此級數前 6 項之和。

12. 試求下列等差級數的和：

- (1) 首項為 7，公差為 3，求前 12 項和。
- (2) 首項為 12，末項為 46，共有 18 項。

13. 已知等差級數  $2+8+14+20+\cdots+80$ 。試求：

- (1) 此級數的首項、公差、項數。
- (2) 56 是此級數的第幾項？ (3) 此級數之和。

14. 已知等比級數  $3-6+12-24+\cdots$ 。

- (1) 試寫出此級數所形成的前 6 項級數形式。
- (2) 試求此級數前 6 項之和。

15. 試求下列等比級數的和：

- (1) 首項為 8，公比為  $\frac{3}{2}$ ，求前 6 項和。
- (2) 首項為 3，末項為 384，共有 8 項。

16. 已知等比級數  $2+6+18+54+\cdots+39366$ 。試求：

- (1) 此級數的首項、公比、項數。
- (2) 4374 是此級數的第幾項？ (3) 此級數之和。

17. 試求下列各級數和：

- (1)  $13+14+15+16+\cdots+87$ 。
- (2)  $30^2+29^2+28^2+27^2+\cdots+1^2$ 。

18. 試求下列各級數和：

- (1)  $11^3+12^3+13^3+14^3+\cdots+20^3$ 。
- (2)  $(1^2-6)+(2^2-7)+(3^2-8)+\cdots+(10^2-15)$ 。

19. 計算下列各級數的和：

- (1)  $2\times 1+3\times 2+4\times 3+\cdots+10\times 9$ 。
- (2)  $2\times 2+4\times 3+6\times 4+\cdots+30\times 16$ 。

20. 在低利率的年代，某銀行為了吸收存款，提出優惠方案，以月利率 0.1% 複利孳息。社會新鮮人小雯打算每個月從薪水提撥固定的金額存入銀行，請幫小雯計算底下兩種方式的本利總和：

(1) 每個月初存入銀行 10000 元，存滿 6 年。

(2) 每個月初存入銀行 12000 元，存滿 5 年。

(四捨五入取到整數位)

答案：

1. 解 (1) 前五項為  $-1, 1, 3, 5, 7$  (2) 得前五項為  $3, 6, 11, 18, 27$

2. 解 (1) 前五項為  $10, 13, 16, 19, 22$  (2) 故前五項為  $3, 6, 12, 24, 48$

3. 解 (1) 得首項  $a_1 = -13$ ，公差  $d = 6$ ，一般項  $a_n = 6n - 19$

(2) 得首項  $b_1 = 2$ ，公比  $r = 2$ ，一般項  $b_n = 2^n$

4. 解 (1)  $\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = a_{n-1} - 3, n \geq 2 \end{cases}$  (2) 故得  $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = b_{n-1} + 6, n \geq 2 \end{cases}$

5. 解 (1)  $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$  (2) 故得  $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = -2b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

6. 解 (1)  $\langle a_n \rangle$  的遞迴式為  $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$

(2) 故得  $\langle b_n \rangle$  的遞迴式為  $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = \frac{\sqrt{2}}{2} b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

7. 解 (1) 故第 10 項為  $a_{10} = 2 \times 10^2 = 200$  (2)  $b_{10} = 191$

8. 解 (1) 故前 5 項為  $12, 31, 88, 259, 772$

(2) 故前 5 項為  $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{21}{55}, \frac{55}{144}$

9. 解 推測此數列一般項為  $a_n = \frac{n}{2n+1}$ ，證明略

10. 證明略

11. 解 (1) 前 6 項為  $5+8+11+14+17+20$  (2) 前 6 項之和為 75

12. 解 (1) 故前 12 項之和為  $=282$  (2)  $S_{18} = 522$

13. 解 設此級數的首項為  $a_1$ ，公差為  $d$ ，項數為  $n$

(1) 故首項為 2，公差為 6，項數為 14

(2) 56 是第 10 項(3) 故此級數之和為 574

14. 解 (1)  $3-6+12-24+48-96$  (2) 前 6 項之和為  $-63$

15. 解

$$(1) \text{ 故前 6 項和為 } S_6 = \frac{8 \times \left[ 1 - \left( \frac{3}{2} \right)^6 \right]}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{8 \times \left( 1 - \frac{729}{64} \right)}{-\frac{1}{2}} = -16 \times \left( -\frac{665}{64} \right) = \frac{665}{4}$$

(2) 此級數和為  $=765$

16. 解 設此級數的首項為  $a_1$ ，公比為  $r$ ，項數為  $n$

(1) 首項為 2，公比為 3，項數為 10 (2) 第 8 項 (3) 此級數之和為 59048

17. 解 (1)  $=3750$  (2)  $=9455$

18. 解 (1) 41075 (2) 280

19. 解 (1) 330 (2) 2720

20. 解 (1) 本利總和約為 746913 元 (2) 本利總和約為 742398 元

## 第二部分 計數原理

1. 試寫出下列敘述的否定敘述。

(1) (擲一枚公正的骰子) 點數小於 3。 (2) ( $x$  是實數)  $3 < x < 8$ 。

2. 集合  $S = \{a, b, c\}$ , 試問:

(1)  $S$  有多少個元素? (2) 請依元素個數依序列出  $S$  的所有子集合。

3. 集合  $A = \{x \mid 1 \leq x < 9\}$ ,  $B = \{x \mid 4 < x \leq 12\}$ , 試求:

(1)  $A \cap B$ 。 (2)  $A \cup B$ 。

4. 假設字集  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , 試求:

(1)  $A'$ 。 (2)  $B'$ 。 (3)  $A - B$ 。 (4)  $B - A$ 。

5. (1) 甲、乙兩人參加羽毛球比賽, 規定 3 局 2 勝 (沒有和局) 者贏得比賽, 請列出所有可能的比賽結果。

(2)  $A$ 、 $B$  兩校參加排球比賽, 規定 5 局 3 勝者獲勝 (沒有和局), 已知第一、二局都由  $A$  校獲

勝, 試問接下來的比賽過程有幾種勝負情形?

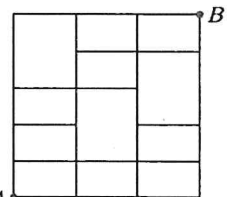
6 (1) 翰翰旅行社推出 5 種日本深度遊, 7 種歐洲浪漫行, 3 種北美輕鬆遊, 小雯打算利用暑假參加

其中一種行程, 共有幾種選擇?

(2) 小華有 3 雙運動鞋, 2 雙皮鞋, 4 雙布鞋, 試問小華出門時可以有幾種鞋子的選擇?

7. 如右圖, 從  $A$  點到  $B$  點依下列行進方式, 各有幾種走法:

(1) 只能向上或向右。 (2) 只能向上、向下或向右。



8. (1) 翰翰旅行社推出 5 種日本深度遊, 7 種歐洲浪漫行, 3 種北美輕鬆遊, 小慧打算就這三類行程各選一種行程參加, 有幾種選擇?

(2) 小偉有 2 頂不同的帽子, 6 件不同的上衣, 3 條不同的長褲, 假設帽子可戴上也可不戴, 試求任意搭配最多有幾種穿著方式?

9. 高一某班 42 人的段考成績，英文與數學至少一科及格者有 36 人，英文及格者有 30 人，數學及格者有 26 人，試問：

(1) 英文、數學都及格者有多少人？ (2) 英文、數學都不及格者有多少人？

10. 用 0, 1, 2, 3, 4 排五位數，依下列規則，可以排幾個相異的五位數？

(1) 數字可重複。 (2) 數字不可重複。

11. 試計算下列各式的值。

(1)  $7!$ 。 (2)  $P_3^{10}$ 。

12. 學校熱食部供應蔬食特餐、肉絲蛋炒飯、咖哩燴飯、排骨飯、牛腩飯等 5 種快餐，小華打算從週一到週五每天各選一種當午餐，每天都點不同的餐點，試問：

(1) 五天下來，有幾種不同的點餐方法？

(2) 如果將蔬食特餐與牛腩飯安排在連續兩天（蔬食特餐、牛腩飯可以調整順序），則有幾種方法？

13. 書架上有 3 本英文書、4 本中文書、2 本日文書。試分別計算下列的排列數。

(1) 相同語文的書排在一起。

(2) 相同語文的書放在一起，但是中文書一定要在英日文書的中間。

14. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6 等 6 個數中，任選 4 個排成四位數，數字不可重複，試問：

(1) 有幾個不同的四位數？ (2) 有幾個不同的偶數？

15. 小輝計劃開車帶著家人出遊，預定當天的行程是賞蓮、參觀綠色隧道、參觀古老書院、逛老街、參觀觀光工廠等五個景點。試依下列條件計算有幾種行程安排：

(1) 由於清晨或黃昏賞蓮都很好，故排為第一個景點或最後一個。

(2) 為了避免太早而尚未營業，觀光工廠不安排為第一個景點。同時，為了避免行程耽誤順延過晚，賞蓮不安排為最後一個景點。



16. 某公司舉辦員工聯歡大會，除了邀請某知名團體演出 3 個節目外，主管也準備了 2 個節目，員工則準備 5 個節目。假設知名團體負責最後 3 個節目壓軸，其餘則依下列方式安排，試問分別有幾種安排方式？

- (1) 最後 3 個節目的順序已由知名團體排定不能更動，前面 7 個主管與員工的節目由抽籤決定。
- (2) 最後 3 個節目的順序授權主持人任意安排，前面的節目由抽籤決定主管或員工的先後，再連續安排他們的節目。

17. (1) 將 3, 3, 4, 4, 6, 6, 6 等七個數字任意排列，可有幾種不同的七位數？

(2) 小雯有 8 個大小相同的串珠，3 個紫色、3 個黃色、2 個白色，現在用一條繩子由上而下串起這 8 個珠子，試問有幾種不同的串法？

18. (1) 四海為家的人，漂泊異鄉，如果生活困頓或經常思念親人，常有「年年難過年年過」的感慨。試問若將這 7 個字任意排列，有幾種排法？

(2) 宋代詞人李清照在她著名的一闕詞〈聲聲慢〉中，使用疊字的手法，寫出前 8 個字「尋尋覓覓冷冷清清」。試問若將這 8 個字任意排列，有幾種排列方法？

19. (1) 連續擲一枚公正的骰子 3 次，依序記錄出現的點數，試問有幾種不同的結果？

(2) 學校餐廳的主菜有滷排骨、炸魚排、炸雞排、紅燒豆包等 4 種，小婷每天任意點選一種（可以重複），試問一週五天會有幾種點餐方式？

20. (1) 將 5 封不同的信投入 3 個不同的郵筒，有幾種投法？

(2) 4 個好朋友結伴去喝下午茶，有 5 種飲料可以選擇，試問有幾種點選飲料的方法？

21. (1) 試計算  $C_3^{20}$  的值。(2) 已知  $C_k^{12} = C_3^{12}$ ，試求  $k$  值。

22. (1) 某校規定，學生須在修業期間內，從 8 個開放選修的科目中選修 3 個，試問有幾種可能的選修組合？  
(2) 某高中打算從週一到週五的五天中，挑選兩天開放穿便服到校，試問有幾種安排的方式？
23. 平面上有 8 個相異點，任 3 點不共線，則：  
(1) 可決定幾條直線？ (2) 可決定幾個三角形？
24. (1) 為慶祝週年慶，某餐廳特別提供「保證飽特餐」回饋顧客。內容為沙拉或湯 6 選 2，主菜 5 選 2，主食 3 選 1，飲料或甜點 5 選 2。試問共有幾種點餐組合的可能？  
(2) 某社區管委會打算從 8 名男性及 7 名女性委員中，選出 5 名常務委員，如果規定任何一個性別都不能少於 2 人，試問有幾種可能的組合？
25. 將 8 本不同的書依下列方式分成 3 堆，試求各有幾種分法？  
(1) 一堆 5 本，一堆 2 本，一堆 1 本。  
(2) 一堆 4 本，一堆 2 本，一堆 2 本。
26. 將 5 枝完全相同的鉛筆分給小朋友，試求各有幾種分法？  
(1) 分給 8 個小朋友，每人最多 1 枝（有 3 人沒有鉛筆）。  
(2) 分給 3 個小朋友，每人至多 2 枝。
27. 羅老師打算從班上跑步比較快的 8 名男生、6 名女生中，各選出 2 名參加運動會的 400 公尺接力賽，試求：  
(1) 若隨機安排為第一棒至第四棒，共有幾種選手名單？  
(2) 若男生安排為第一棒與第四棒，女生安排為第二、三棒，共有幾種選手名單？
28. (1) 試求  $(x+y)^7$  展開後， $x^5y^2$  項的係數。(2) 試求  $(x-y)^5$  展開後， $x^2y^3$  項的係數。

29. (1) 試求  $(2x+y)^5$  展開後， $x^3y^2$  項的係數。(2) 試求  $(3x-2y)^3$  展開後， $xy^2$  項的係數。

30. 某教練打算從甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛等 8 人中挑選 5 人參加籃球比賽，試求：

(1) 若任意挑選，有幾種方法？

(2) 假設不選甲有  $m$  種方法，必選甲有  $n$  種方法，則數對  $(m, n) = ?$

### 答案

1. 解 (1) 點數大於或等於 3 (2)  $x \leq 3$  或  $x \geq 8$

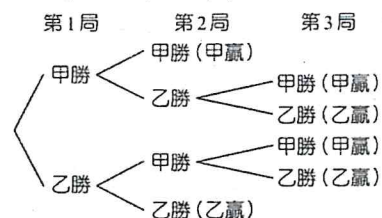
2. 解 (1)  $n(S) = 3$

(2) 0 個： $\{\}$  1 個： $\{a\}, \{b\}, \{c\}$  2 個： $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$  3 個： $\{a, b, c\}$

3. 解 (1)  $A \cap B = \{x \mid 4 < x < 9\}$  (2)  $A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 12\}$

4. 解 (1)  $A' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  (2)  $B' = \{0, 1, 8, 9\}$

(3)  $A - B = \{1, 9\}$  (4)  $B - A = \{2, 4, 6\}$



5. 解 (1)

(2)  $\therefore$  共 4 種

6. 解 (1) 15 (種) (2) 9 (種)

7. 解 (1) 34 種走法 (2) 125 種走法

8. 解 (1) 105 種選擇 (2) 54 (種)

9. 解 (1) 20 人 (2) 6 人

10. 解 (1) 2500 (種) (2) 96 (種)

11. 解 (1) 5040 (2) 720

12. 解 (1) 120 (種) (2) 48 (種)

13. 解 (1) 1728 (種) (2) 576 (種)

14. 解 (1) 360 (個) (2) 180 (個)

15. 解 (1) 48 (種) (2) 78 (種)

16. 解 (1)  $P_7^7 \times 1 = 7! = 5040$  (種) (2) 2880 (種)

17. 解 (1)  $\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$  (種) (2)  $\frac{8!}{3! \times 3! \times 2!} = 560$  (種)

18. 解 (1)  $\frac{7!}{4! \times 1! \times 2!} = 105$  (種) (2)  $\frac{8!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 2520$  (種)
19. 解 (1)  $6^3 = 216$  (種) (2)  $4^5 = 1024$  (種)
20. 解 (1) 有  $3^5 = 243$  (種) (2) 有  $5^4$
21. 解 (1) 1140 (2)  $k=3$  或 9
22. 解 (1) 56 (種) (2)  $C_2^5 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$  (種)
23. 解 (1)  $C_2^8 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$  (條) (2)  $C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$  (個)
24. 解 (1) 4500 (種) (2) 2156 (種)
25. 解 (1) 168 (種) (2)  $= 70 \times 6 \times \frac{1}{2} = 210$  (種)
26. 解 (1)  $C_5^8 = 56$  (種) (2)  $C_2^3 = 3$  (種)
27. 解 (1) 10080 (種) (2) 1680 (種)
28. 解 (1)  $C_2^7 = 21$  (2)  $-C_3^5 = -10$
29. 解 (1) 80 (2) 36
30. 解 (1)  $C_5^8 = 56$  (種) (2) 數對  $(m, n) = (21, 35)$

### 第三部分 機率

1. 擲一枚硬幣 3 次，觀察出現的正反面並依序記錄。例如：以（正，正，正）的方式代表連續三次都出現正面。試寫出：

- (1) 樣本空間。      (2) 不可能事件。  
(3) 出現 2 次正面的事件。      (4) 三次都是反面的事件。

2. 擲一顆骰子一次，觀察出現的點數。試寫出：

- (1) 基本事件。      (2) 必然事件。  
(3) 出現偶數點數的事件。      (4) 點數不大於 4 的事件。

3. 擲一顆骰子一次，觀察出現的點數。令  $S$  表示這個試驗的樣本空間， $A$  表示點數不小於 4 的事件， $B$  表示出現偶數點的事件。試寫出：

- (1) 事件  $A$ 。      (2) 事件  $B$ 。      (3)  $A$  與  $B$  的和事件。  
(4)  $A$  與  $B$  的積事件。      (5)  $B$  的餘事件。

4. 擲 3 枚均勻硬幣一次，觀察出現的正反面，試求：

- (1) 恰好一個正面的機率。      (2) 至少一個反面的機率。

5. 擲 2 顆公正的骰子一次，計算其點數和，試求：

- (1) 點數和為 6 的機率。      (2) 點數和大於 3 的機率。

6. 一副撲克牌有 4 種花色，各有 13 種點數，合計 52 張牌。小明從一副撲克牌中任意抽取 2 張，試求：

- (1) 點數相同，花色不同的機率。      (2) 花色相同，點數不同的機率。

7. 袋中有 4 顆紅球與 3 顆白球，小雯依下列兩種方式取球，試求：

- (1) 同時取 2 球，取到 1 紅球 1 白球的機率。  
(2) 同時取 4 球，取到 3 紅球 1 白球的機率。

8. 假設樣本空間  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，事件  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ， $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 。試求：

- (1)  $P(A \cap B)$ 。      (2)  $P(A \cup B)$ 。      (3)  $P(A \cap B')$ 。

9. 假設  $S$  為某試驗之樣本空間， $A$ 、 $B$  為兩事件。若事件  $A$  或事件  $B$  發生的機率為  $\frac{5}{6}$ ，事件  $A$  與事件  $B$  均發生的機率為  $\frac{1}{6}$ ，事件  $B$  發生的機率為  $\frac{2}{3}$ ，

試求：

(1) 事件  $A$  發生的機率。 (2) 事件  $A$  發生且事件  $B$  不發生的機率。

10. 袋中裝有大小相同的紅球 2 顆、白球 2 顆，自袋中一次取出 2 球：

(1) 假設取出的 2 球顏色相同可得 20 元，顏色不同可得 10 元，試求此遊戲的期望值。

(2) 假設取出 2 紅球可得 50 元，2 白球可得 30 元，如果希望期望值為 0 元，則取出 2 球顏色不同時，應賠幾元？

答案

1. 解 (1)  $S = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$

(2)  $\emptyset$  (或  $\{ \}$ )

(3)  $\{(\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{正})\}$  (4)  $\{(\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$

2. 解 (1)  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$  (2)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(3)  $\{2, 4, 6\}$  (4)  $\{1, 2, 3, 4\}$

3. 解 (1)  $A = \{4, 5, 6\}$  (2)  $B = \{2, 4, 6\}$

(3)  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$  (4)  $A \cap B = \{4, 6\}$  (5)  $B' = \{1, 3, 5\}$

4. 解 (1)  $P(A) = \frac{3}{8}$  (2)  $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

5. 解 (1)  $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

(2) 所求為  $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$

6. 解 (1) 機率為  $\frac{C_1^{13} \times C_2^4}{C_2^{52}} = \frac{\frac{13}{1} \times \frac{4 \times 3}{1 \times 2}}{\frac{52 \times 51}{1 \times 2}} = \frac{13 \times 4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{17}$

(2) 機率為  $\frac{C_1^4 \times C_2^{13}}{C_2^{52}} = \frac{\frac{4}{1} \times \frac{13 \times 12}{1 \times 2}}{\frac{52 \times 51}{1 \times 2}} = \frac{4 \times 13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{4}{17}$

7. 解 (1) 機率為  $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$  (2) 機率為  $\frac{12}{35}$

8. 解 (1)  $\frac{1}{5}$  (2)  $\frac{7}{10}$  (3)  $\frac{1}{5}$

9. 解 (1)  $P(A) = \frac{1}{3}$  (2)  $\frac{1}{6}$

10. 解 (1)  $20 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{4}{6} = \frac{40}{3}$  (元) (2) 應賠 20 元

#### 第四部份 數據分析

1. (1) 試求 3, 5, -3, 10, -8, 11 的算術平均數。

(2) 小華連續五週的數學週考成績為 80, 90, 75, 100, 90, 試求這些成績的算術平均數。

2. 小雯手中持有 A、B、C、D、E 五家公司的股票若干, 已知上週五與本週五的股價及小雯持股數如下表, 試求:

	A	B	C	D	E
上週五股價 (單位: 元/股)	38	36	72	18	19
本週五股價 (單位: 元/股)	36	40	76	20	20
小雯持股數 (單位: 千股)	3	3	2	9	8

(1) 上週五小雯持股的平均股價。 (2) 本週五小雯持股的平均股價。

3. (1) 試求 18, 28, 147 的幾何平均數。

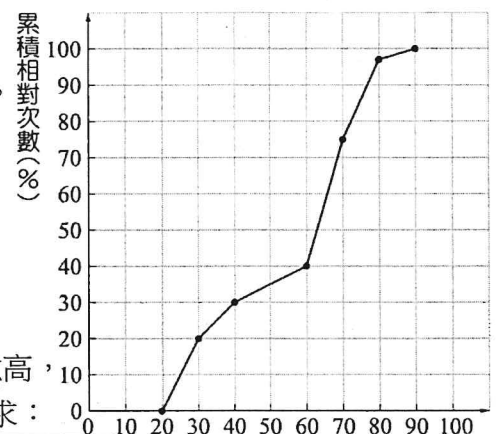
(2) 某公司營業額連續三年的成長率依序為 10%、33.1%、21%, 試求平均成長率。

4. (1) 試求 12, 90, 33, 45, 67 的幾何平均數。(四捨五入取到小數點後第一位)

(2) 某公司的營業額連續五年成長率依序為 3.2%、-2.8%、1.3%、5.4%、4.7%, 試求平均成長率。(四捨五入取到百分數的小數點後第一位)

5. 右圖為一組一維數據的累積相對次數折線圖, 試求:

(1) 第 75 百分位數 ( $P_{75}$ )。 (2) 第 40 百分位數 ( $P_{40}$ )。



6. 為配合畢業生申請國外研究所需要, 我國許多大學已開始採用「等第績分平均 (GPA)」來評估學生成績。所謂 GPA (Grade Point Average), 是透過轉換機制, 將原始成績轉換為 0 至 4 分, 0 代表不及格, 其餘分數愈高, 成績愈佳。已知某校一年級 873 名學生成績如下表, 試求:

GPA	0	1	2	3	4
人數	63	104	269	312	125
累計人數	63	167	436	748	873

(1) 第 80 百分位數 ( $P_{80}$ )。 (2) 第 25 百分位數 ( $P_{25}$ )。



7. 已知一組數據 2, 14, 11, 5, 20, 14, 試求：

(1) 變異數。 (2) 標準差。

8. 已知一組數據  $x_i: 1, 3, 5, 7, 9$ , 試求依下列規則變換後的新數據：

(1)  $y = -2x + 30$ 。 (2)  $y = 10(x - 2)$ 。

9. 這次段考因為數學成績不理想，經各班任課老師討論後，決定以原始分數除以 2 再加 50 分的方式調整。已知高一某班段考平均 38 分，標準差 5.6 分，試求該班調整後的：(1) 平均分數。 (2) 標準差。

10. 某公司在 A, B 兩地分別招考員工，成績如右表。已知小明與小華都參加考試，請根據右表求解下列問題：

	算術平均數	標準差
A 地	72	16
B 地	78	12

(1) 小明在 A 地參加考試得 74 分，試求小明得分的標準化數據。

(2) 小華在 B 地參加考試，將得分標準化以後，得標準化數據為 0.5，試求小華的考試分數。

11. 一組標準化的二維數據如下表，試求相關係數。

X	1.5	0	0.5	-1.5	-0.5
Y	-0.5	-1.5	1.5	0	0.5

12. 一組二維數據如下表，試求相關係數。

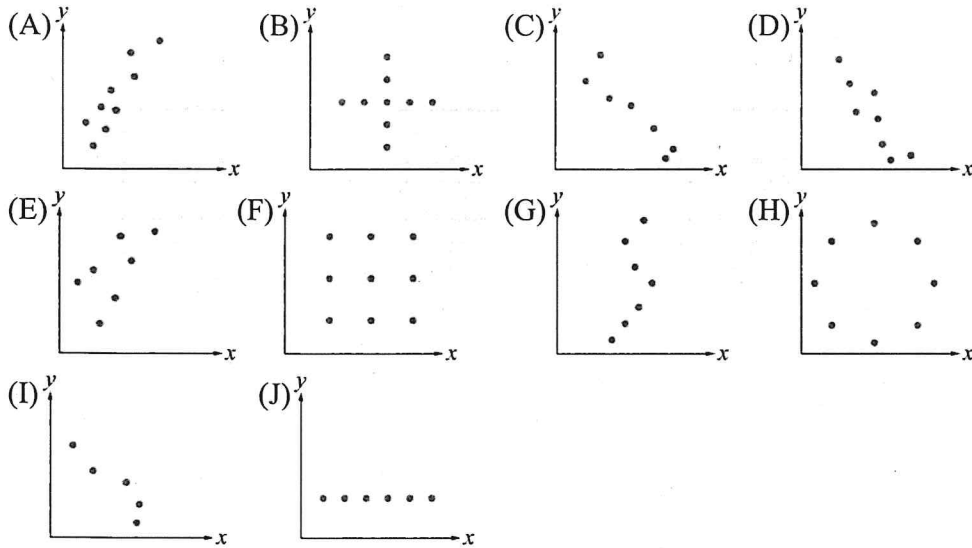
x	32	23	26	14	20
y	15	13	19	7	11

13. 已知一群二維數據  $(x_i, y_i)$  的相關係數為 0.45，將  $(x_i, y_i)$  平移伸縮為新的數據  $(x_i', y_i')$ ，

(1) 若  $(x_i', y_i') = (5x_i + 1, -6y_i - 7)$ ，試求相關係數  $r'$ 。

(2) 若  $(x_i'', y_i'') = (-5x_i + 30, -2y_i + 25)$ ，試求相關係數  $r''$ 。

14. 觀察下列 10 個散布圖，判斷其相關係數的正負，請選出符合下列條件的散布圖：



(1) 相關係數大於 0。 (2) 相關係數小於 0。

15. 一組二維數據的標準化數據如下表，試求最適直線的方程式。

$X$	1.5	0.5	0	-1.5	-0.5
$Y$	0.5	0	1.5	-0.5	-1.5

16. 一組二維數據如下表，試求最適直線的方程式。

$x$	46	43	52	55	49
$y$	24	32	48	44	32

17. 假設高一某班第一次段考的國文、數學成績以  $(x_i, y_i)$  表示，平均數分別為  $\mu_x=65$ 、 $\mu_y=70$ ，標準差分別為  $\sigma_x=8$ 、 $\sigma_y=12$ ，兩科成績的相關係數為 0.6。試求：

- (1) 數學成績對國文成績的最適直線方程式。
- (2) 已知小明的國文成績 85 分，試推估小明的數學成績。

18. 根據某商店的銷售紀錄，7 月 1 日開始，連續 5 日每日最高溫與當日冰棒銷售量如下表：

日期	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5
最高溫 (°C)	30	34	36	33	32
銷售量 (枝)	430	500	600	540	560

- (1) 試以每日最高溫為  $x$  坐標，每日銷售量為  $y$  坐標，求最適直線方程式。  
 (2) 若氣象局預測第 6 日最高溫為  $35^{\circ}\text{C}$ ，試以(1)的結果，預估第 6 日的冰棒銷售量。

答案:

1. 解 (1)  $\frac{1}{6} \times 18 = 3$  (2)  $\frac{1}{5} \times 435 = 87$

2. 解 (1)  $\frac{1}{25} \times 680 = 27.2$  (元) (2)  $\frac{1}{25} \times 720 = 28.8$  (元)

3. 解 (1) 42 (2) 故平均成長率為 21 %

4. 解 (1) 按計算機可得  $\approx 40.4$  (2) 故約為 2.3 %

5. 解 (1) 第 75 百分位數  $P_{75} = 70$  (2) 第 40 百分位數  $P_{40} = 60$

6. 解 (1) 得  $P_{80} = 3$  (2) 得  $P_{25} = 2$

7. 解 (1) 變異數  $\sigma^2 = \frac{1}{6} \times 216 = 36$  (2) 標準差  $\sigma = \sqrt{36} = 6$

8. 解 (1) 轉換為 28, 24, 20, 16, 12 (2) 轉換為 -10, 10, 30, 50, 70

9. 解 (1) 69 分 (2) 2.8 分

10. 解 (1)  $\frac{74-72}{16} = \frac{2}{16} = 0.125$  (2) 84 分

11. 解  $r = \frac{(-0.75)+0+0.75+0+(-0.25)}{5} = \frac{-0.25}{5} = -0.05$

12. 解  $r = \frac{96}{\sqrt{180} \times \sqrt{80}} = \frac{96}{6\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}} = 0.8$

13. 解 (1)  $r' = -0.45$  (2)  $r'' = 0.45$

14. 解 (1) (A)(E)(G) (2) (C)(D)(I)

15. 解  $Y = 0.45X$

16. 解  $y - 36 = \frac{8}{5}(x - 49)$

17. 解 (1) 即  $y = 70 + 0.9(x - 65)$  (2) 88 (分)

18. 解 (1)  $y = 526 + \frac{45}{2}(x - 33)$  (2) 預估第 6 日銷售量為 571 枝

### 第五部分 三角比

1. 直角三角形  $ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ，兩股長  $\overline{BC}=5$ ， $\overline{AC}=12$ ，  
試求  $\sin A$ ， $\cos A$ ， $\tan A$ 。

2. 直角三角形  $ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ，斜邊  $\overline{AB}=8$ ， $\cos A=\frac{3}{4}$ ，試求：

(1)  $\overline{AC}$ 。 (2)  $\tan A$ 。

3. 已知  $\theta$  為銳角且  $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2$ ，試求  $\tan \theta$  之值。

4. 已知  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  且  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，試求  $\sin \theta$  與  $\tan \theta$ 。

5. 直角三角形  $ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ，已知  $\cos A = \frac{5}{13}$ ，試求  $\sin A$ ， $\sin B$ ， $\cos B$ 。

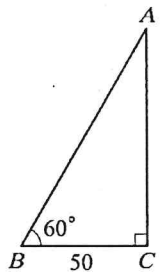
6. 已知  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，若  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，試求：

(1)  $\sin \theta \cos \theta$ 。 (2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 。

7. 使用計算機求解下列各題：

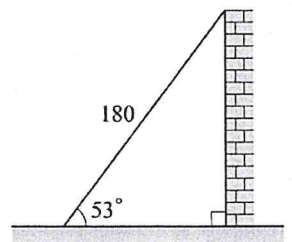
(1)  $\sin 23^\circ$ ， $\tan 71^\circ 30'$ 。(四捨五入取到小數點後第四位)

(2) 已知  $\sin \theta = 0.4$ ， $\cos \phi = 0.7$ ，試求  $\theta$  與  $\phi$ 。(四捨五入取到小數點後第一位)



8. 如右圖，直角三角形  $ABC$  為一座三角公園的示意圖，已知其中一邊  $\overline{BC}$  長 50 公尺， $\angle ABC=60^\circ$ ，試求此公園的周長為多少公尺？

9. 如右圖，將長度為 180 公分的竹竿的一端靠在右方牆上，測得另一端與地面夾角為  $53^\circ$ ，試求牆的高度約為多少公分？(四捨五入取到小數點後第一位)



10.

- (1) 試求  $750^\circ$  的同界角  $\theta$ ，其中  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ 。  
(2) 試求  $-480^\circ$  的同界角  $\phi$ ，其中  $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$ 。

11. (1) 已知標準位置角  $\theta$  終邊一點  $A$  坐標為  $(-8, 15)$ ，試求  $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ 。

(2) 已知標準位置角  $\theta$  終邊一點  $P$  坐標為  $(x, 3)$ ，且  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，  
試求  $x$ ， $\tan \theta$ 。

12. 試求  $\sin 210^\circ$ ， $\cos 210^\circ$ ， $\tan 210^\circ$  之值。

13. 使用計算機求下列各三角比：(四捨五入取到小數點後第四位)

(1)  $\sin 143^\circ$ 。 (2)  $\cos 162^\circ 30'$ 。 (3)  $\tan(-108^\circ)$ 。

14. 已知  $\theta$  為銳角，且  $\sin \theta = 0.3$ ，試求：

- (1)  $\sin(180^\circ - \theta)$ 。  
(2)  $\cos(\theta - 90^\circ)$ 。

15. 已知  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  且  $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ，試求：

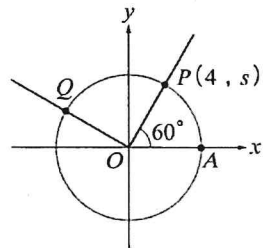
- (1)  $\cos \theta$ 。 (2)  $\tan \theta$ 。

16. (1) 試求  $\sin(-1590^\circ)$  的值。 (2) 試求  $\cos 510^\circ$  的值。

(3) 試求  $\tan 330^\circ$  的值。

17. 如右圖，圓  $C$  的圓心在原點  $O(0, 0)$ ， $\angle POA = 60^\circ$ ， $P$  點坐標為  $(4, s)$ ，試求：

- (1)  $s$  值。  
(2) 若  $\angle QOA = 150^\circ$ ，試求  $Q$  點坐標。



18. 已知兩直線方程式  $L_1: y=3x-2$ ,  $L_2: x-2y+2=0$ 。試求：

(1) 直線  $L_1$  的斜角。 (2) 直線  $L_2$  的斜角。

(3)  $L_1$  與  $L_2$  的銳夾角。

(使用計算機  $\tan^{-1}$  鍵計算角度，並四捨五入取到小數點後第一位)

19. 使用計算機做下列轉換：

(1) 將直角坐標  $P(-5, 2)$  轉換成極坐標表示。

(角度介於  $0^\circ$  至  $360^\circ$  之間，四捨五入取到整數位)

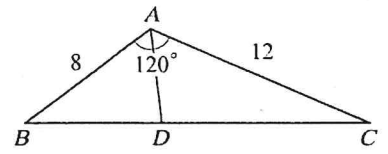
(2) 將極坐標  $Q[12, 230^\circ]$  轉換為直角坐標。(四捨五入取到小數點後第一位)

20. 直角三角形  $ABC$  中， $\angle A=60^\circ$ ,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\overline{AB}=8$ 。試求：

(1)  $\overline{AC}$ 。 (2)  $\triangle ABC$  面積。

21. 如右圖， $\triangle ABC$  中，已知  $\angle A=120^\circ$ ,  $\overline{AB}=8$ ,  $\overline{AC}=12$ ,  $\angle A$  的角平分線交  $\overline{BC}$  於  $D$  點。試求：

(1)  $\triangle ABC$  面積。 (2)  $\overline{AD}$ 。



22. 已知  $\triangle ABC$  中， $\angle A: \angle B: \angle C=1:2:3$ ，試求：

(1) 三內角  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 。

(2) 三邊邊長比  $\overline{BC}: \overline{CA}: \overline{AB}$ 。

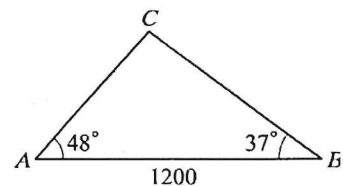
23.  $\triangle ABC$  中， $\angle A=30^\circ$ ,  $\angle B=45^\circ$ ,  $\overline{AC}=12$ 。試求：

(1)  $\overline{BC}$ 。 (2)  $\triangle ABC$  的外接圓面積。

24. 如右圖， $A$ 、 $B$  兩地距離 1200 公尺，自  $A$  地測得  $\angle BAC=48^\circ$ ，自  $B$  地測得  $\angle ABC=37^\circ$ 。試求：

(1)  $A$ 、 $C$  兩地之距離  $\overline{AC}$ 。

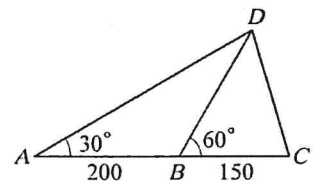
(2)  $B$ 、 $C$  兩地之距離  $\overline{BC}$ 。(四捨五入取到小數點後第一位)



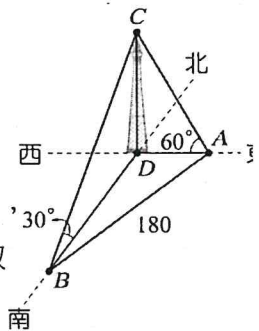
25.  $\triangle ABC$  中，已知  $\overline{AB}=8$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\angle B=60^\circ$ ，試求：  
 (1)  $\overline{AC}$ 。 (2)  $\cos A$ 。

26. 已知  $\triangle ABC$  中，三邊邊長分別為  $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{CA}=5$ 。試求：  
 (1)  $\angle A$ 。 (2)  $\angle C$ 。  
 (若非特別角，請四捨五入取到小數點後第一位)

27. 如右圖， $A$ 、 $B$ 、 $C$  為東西向筆直公路上的三點， $D$  是公路北側地面一點。小明在  $A$  點測得  $\angle DAC=30^\circ$  後，沿著公路走 200 公尺到  $B$  點，測得  $\angle DBC=60^\circ$ ，再走 150 公尺到  $C$  點，試求：  
 (1)  $C$  點到  $D$  點之距離  $\overline{CD}$ 。  
 (2)  $\angle BCD$ 。(使用計算機四捨五入取到小數點後第一位)



28. 如右圖，在塔的正東方一點  $A$  測得塔頂仰角  $60^\circ$ ，在塔的正南方一點  $B$  測得塔頂仰角  $30^\circ$ 。已知  $A$  點與  $B$  點距離 180 公尺，試求塔高  $\overline{CD}$ 。



29. 已知某大樓高 120 公尺，今自樓頂測得東  $30^\circ$  南地面  $A$  點的俯角為  $30^\circ$ ，又測得東  $50^\circ$  北地面  $B$  點的俯角為  $45^\circ$ ，試求  $A$ 、 $B$  兩點距離。(四捨五入取到整數位)

答案

1. 解 故  $\sin A = \frac{5}{13}$ ， $\cos A = \frac{12}{13}$ ， $\tan A = \frac{5}{12}$

2. 解 (1)  $\overline{AC} = 6$  (2)  $\tan A = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

3. 解 故  $\tan \theta = 3$

4. 解  $\sin \theta = \frac{4}{5}$   $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

5. 解  $\sin A = \frac{12}{13}$   $\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{5}{13}$

$$\cos B = \cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{12}{13}$$

6. 解 (1)  $\sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$  (2)  $= \frac{7}{5} \times \left(1 - \frac{12}{25}\right) = \frac{91}{125}$
7. 解 (1) 近似值 0.3907, 近似值 2.9887 (2) 近似值  $23.6^\circ$  近似值  $45.6^\circ$
8. 解為  $100 + 50 + 50\sqrt{3} = 150 + 50\sqrt{3}$  (公尺)
9. 解 故牆的高度約為 143.8 公分
10. 解 (1)  $\therefore \theta = 30^\circ$  (2)  $\therefore \phi = 240^\circ$
11. 解 (1)  $\therefore \sin \theta = \frac{15}{17}$   $\cos \theta = -\frac{8}{17}$  (2)  $\therefore x = \frac{9}{4}$ ,  $\tan \theta = \frac{3}{9} = \frac{4}{3}$
12. 解  $\therefore \sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$   $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   $\tan 210^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
13. 解 (1) 取近似值 0.6018 (2) 取近似值  $-0.9537$  (3) 取近似值 3.0777
14. 解 (1) 0.3 (2)  $\cos(\theta - 90^\circ) = 0.3$
15. 解 (1)  $\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$  (2)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
16. 解 (1)  $-\frac{1}{2}$  (2)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (3)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
17. 解 (1)  $s = 4\sqrt{3}$  (2)  $= \left(-\frac{8\sqrt{3}}{2}, 8 \times \frac{1}{2}\right) = (-4\sqrt{3}, 4)$
18. 解 故(1) $L_1$  的斜角為  $71.6^\circ$  (2) $L_2$  的斜角為  $26.6^\circ$   
(3) $L_1$  與  $L_2$  的銳夾角為  $45.0^\circ$
19. 解 (1)  $\therefore P[\sqrt{29}, 158^\circ]$  (2)  $\therefore Q(-7.7, -9.2)$
20. 解 (1)  $= 8 \times \frac{1}{2} = 4$  (2)  $= 8\sqrt{3}$
21. 解 (1)  $= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$  (2)  $\therefore \overline{AD} = \frac{24}{5}$
22. 解 (1)  $\angle A = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$ ,  $\angle B = 180^\circ \times \frac{2}{6} = 60^\circ$ ,  $\angle C = 180^\circ \times \frac{3}{6} = 90^\circ$   
(2)  $\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3} : 2$
23. 解 (1)  $\overline{BC} = 6\sqrt{2}$  (2) 外接圓面積為  $72\pi$
24. 解 (1) 取  $\overline{AC} \approx 724.9$  (公尺) (2)  $\overline{BC} \approx 895.2$  (公尺)



25. 解 (1)  $\overline{AC} = 7$  (2)  $\cos A = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 8 \times 7} = \frac{88}{2 \times 8 \times 7} = \frac{11}{14}$

26. 解 分別用餘弦定理求解

(1)  $\angle A \approx 21.7867893^\circ \approx 21.8^\circ$  (2)  $\angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

27. 解 (1)  $\overline{CD} = 50\sqrt{13}$  (2)  $73.9^\circ$

28. 解 故塔高  $\overline{CD} = 18\sqrt{30}$  (公尺) (約 98.59 公尺)

29. 解  $A$ 、 $B$  相距約 221 公尺